

Correction épreuve Math II

3

4.b) $H \in \mathcal{S}^+$ donc les $\lambda_i \geq 0$ et par suite si on pose $V_i = \sqrt{\lambda_i} U_i$, on trouve $H = \sum_{i=1}^n V_i^t V_i$.

si $H \in \mathcal{S}^{++}$ ($V_1, V_2, \dots, V_n$) est une base orthogonale.

4.c) on a $sp(H) = \{1, 3\}$ d'où $H \in \mathcal{S}^{++}$.

$$E_1 = \text{vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3 = \text{vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right). \text{ Soit } U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2$ et $V_3 = \sqrt{3}U_3$.

III

1.a) Dans la matrice $C - XI_n$, on remplace L_1 par $L_1 + XL_2 + \dots + X^{n-1}L_n$ puis on développe suivant la première ligne.

1.b) Il suffit de remarquer que $\forall 1 \leq i \leq n-1$ on a $CE_i = E_{i+1}$ et en suite une récurrence simple donne le résultat.

1.c) $\sum_{i=1}^n \alpha_i C^{i-1} = 0 \implies \sum_{i=1}^n \alpha_i C^{i-1} E_1 = 0$ et par suite $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i = 0$ ce qui donne $\forall 1 \leq i \leq n$ on a $\alpha_i = 0$.

1.d) $Q = PS + R$ avec $\deg(R) < \deg(P)$, soit $R = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ comme $Q(C) = 0$ alors $R(C) = 0$ et par suite $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ d'où $R = 0$.

1.e) on a C diagonalisable ssi C est annulé par un polynôme scindé à racines simples d'où C diagonalisable ssi P scindé à racines simples.

2. $a_0 E_n + a_1 {}^t C E_n + \dots + a_{n-1} {}^t C E_{n-1} = 0$ en multipliant par ${}^t E_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$ on obtient $a_k = 0$.

3.a) " $\implies$ " récurrence simple.

" $\impliedby$ " évident ($p = 1$).

3.b) évident.

3.c) On a $\rho(C) = \rho({}^t C) < 1$ donc C^p et ${}^t C^p$ tendent vers 0 et par suite $M = 0$. Ce qui donne $\ker \varphi = \{0\}$.

4.a) Découle du fait que φ bijective.

4.b) récurrence simple.

4.c) $\rho({}^t C) = \rho(C) < 1$ donc $({}^t C)^p$ et (C^p) convergent vers 0.

5. On a $G = \sum_{i=0}^{+\infty} {}^t(C^k)H(C^k)$. Comme l'application: $M \mapsto {}^t M$ est continue (linéaire) donc ${}^t G = G$.

L'application: $M \mapsto {}^t X M X$ est continue (linéaire), donc ${}^t X G X = \sum_{i=0}^{+\infty} {}^t (C^i X) H (C^i X) \geq 0$.

$$6.a) \text{ on a } \Omega = \sum_{k=0}^{+\infty} {}^t C^k E_n^t E_n C^k$$

$$\Omega U = 0 \implies {}^t U = 0 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} {}^t (C^k U) E_n^t E_n (C^k U) = 0$$

comme $E_n^t E_n \in S^+$ on a ${}^t (C^k U) E_n^t E_n (C^k U) = 0$ pour tout k . d'où $\langle E_n, C^k U \rangle = 0$ pour tout k .

$$6.b) E_n {}^t E_n \in S^+ \implies \Omega \in S^+.$$

il suffit de montrer que $\ker \Omega = 0$.

$$\text{Soit } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } k=0, \langle E_n, U \rangle = 0 \implies u_n = 0 \text{ d'où } CU = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

et $\langle E_n, CU \rangle = 0 \implies u_{n-1} = 0$. par iteration on a $U = 0$

7.a) Conséquence de III.2..

$$7.b) \text{ On a } G = \sum_{i=0}^{+\infty} {}^t C^i U^t U C^i = \sum_{i=0}^{+\infty} ({}^t C^i)^t Q(C) E_n^t E_n Q(C) C^i.$$

Comme ${}^t Q(C) = Q({}^t C)$ et C commute avec $Q(C)$ on aura:

$$G = {}^t Q(C) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} {}^t C^i E_n^t E_n C^i \right) Q(C) = {}^t Q(C) \Omega Q(C).$$

$$8.a) H \in S^+ \iff H = \sum_{i=1}^n V_i {}^t V_i.$$

Soit G_i la solution de l'équation $G - {}^t C G C = V_i {}^t V_i$. D'après ce qui précède $G_i = {}^t Q_i(C) \Omega Q_i(C)$ et donc

$$H \in S^+ \iff H = \sum_{i=1}^n {}^t Q_i(C) \Omega Q_i(C) - {}^t C \left(\sum_{i=1}^n {}^t Q_i(C) \Omega Q_i(C) \right) C = G - {}^t C G C$$

$$7.b) H = \sum_{i=1}^n {}^t Q_i(C) \Omega Q_i(C) - {}^t C \left(\sum_{i=1}^n {}^t Q_i(C) \Omega Q_i(C) \right) C = G - {}^t C G C.$$

Comme φ est injective on trouve le résultat.

8.b) évident.

9.) on a $(E_3, {}^t C E_3, {}^t C^2 E_3) = (E_3, E_2, E_1)$

$$V_1 = 0E_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} {}^t C E_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} {}^t C^2 E_3 \text{ d'où } Q_1(X) = -\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} X^2$$

$$V_2 = E_3 \text{ donc } Q_2 = 1$$

$$V_3 = 0E_3 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} {}^t C E_3 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} {}^t C^2 E_3 \text{ donc } Q_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X^2.$$

d'autre part l'égalité $I_3 - {}^t C I_3 C = E_3^t E_3$ montre que $\Omega = I_3$
d'où le résultat